**Nazwa przedmiotu:**

Analiza matematyczna 2

**Koordynator przedmiotu:**

Dr hab. Anna Dembińska, Dr hab. Bogusława Karpińska

**Status przedmiotu:**

Obowiązkowy

**Poziom kształcenia:**

Studia I stopnia

**Program:**

Informatyka i Systemy Informacyjne

**Grupa przedmiotów:**

Wspólne

**Kod przedmiotu:**

1120-IN000-ISP-0121

**Semestr nominalny:**

2 / rok ak. 2023/2024

**Liczba punktów ECTS:**

6

**Liczba godzin pracy studenta związanych z osiągnięciem efektów uczenia się:**

1. godziny kontaktowe –98 h; w tym
a) obecność na wykładach – 45 h
b) obecność na ćwiczeniach – 45 h
c) konsultacje – 5 h
d) obecność na egzaminie – 3 h
2. praca własna studenta – 70 h; w tym
a) przygotowanie do ćwiczeń i kolokwiów– 45 h
b) zapoznanie się z literaturą – 10 h
c) przygotowanie do egzaminu – 15 h
Razem 168 h, co odpowiada 6 pkt ECTS

**Liczba punktów ECTS na zajęciach wymagających bezpośredniego udziału nauczycieli akademickich:**

1. obecność na wykładach – 45 h
2. obecność na ćwiczeniach – 45 h
3. konsultacje – 5 h
4. obecność na egzaminie – 3 h
Razem 98 h, co odpowiada 4 pkt. ECTS

**Język prowadzenia zajęć:**

polski

**Liczba punktów ECTS, którą student uzyskuje w ramach zajęć o charakterze praktycznym:**

**Formy zajęć i ich wymiar w semestrze:**

|  |  |
| --- | --- |
| Wykład: | 45h |
| Ćwiczenia: | 45h |
| Laboratorium: | 0h |
| Projekt: | 0h |
| Lekcje komputerowe: | 0h |

**Wymagania wstępne:**

Analiza matematyczna 1
Algebra liniowa z geometrią 1

**Limit liczby studentów:**

Ćwiczenia – 30 os. /grupa

**Cel przedmiotu:**

Celem przedmiotu jest zapoznanie studentów z własnościami przekształceń ciągłych przestrzeni metrycznych i unormowanych, badaniem zbieżności szeregów liczbowych i funkcyjnych, obliczaniem granic i pochodnych cząstkowych funkcji wielu zmiennych, badaniem ich ekstremów oraz liczeniem całek wielokrotnych Riemanna.
Po ukończeniu kursu studenci powinni znać własności: normy, metryki i odwzorowań zwężających w przestrzeniach metrycznych zupełnych. Powinni mieć podstawową wiedzę z zakresu szeregów potęgowych i trygonometrycznych Fouriera, rachunku różniczkowego i całkowego funkcji wielu zmiennych oraz posiadać umiejętność :
- badania zbieżności szeregów liczbowych i funkcyjnych
- liczenia granic i pochodnych cząstkowych funkcji wielu zmiennych
- badania ekstremów funkcji wielu zmiennych
- liczenia całek wielokrotnych Riemanna.

**Treści kształcenia:**

Suma całkowa, definicja całki Riemanna. Górna i dolna całka Darboux. Twierdzenia o funkcjach całkowalnych w sensie Riemanna. Własności całki Riemanna. Interpretacja geometryczna całki Riemanna. Definicja całki oznaczonej i jej własności. Twierdzenie główne rachunku całkowego. Wzór Newtona-Leibniza. Twierdzenie o całkowaniu przez podstawienie. Twierdzenie o całkowaniu przez części. Twierdzenie o wartości średnie rachunku całkowego. Wzory rekurencyjne dla pewnych całek oznaczonych. Definicja całki niewłaściwej I rodzaju, wartość główna całki. Definicja całki niewłaściwej II rodzaju. Obliczanie pól obszarów normalnych. Obliczanie długości łuku prostowalnego. Obliczanie pól i objętości brył obrotowych.
Definicja szeregu liczbowego, jego sumy częściowej i sumy szeregu. Szereg Dirichleta i szereg geometryczny. Warunek konieczny zbieżności szeregu. Kryterium porównawcze zbieżności szeregu o wyrazach nieujemnych. Szeregi o wyrazach dowolnych, zbieżność bezwzględna. Kryterium Cauchy’ego i kryterium D’Alamberta zbieżności szeregu. Szeregi naprzemienne, kryterium Leibniza, zbieżność warunkowa. Zamiana kolejności sumowania w szeregach. Twierdzenie Riemanna.
Zbieżność punktowa i jednostajna ciągu funkcyjnego. Własności ciągów jednostajnie zbieżnych. Szereg funkcyjny punktowo i jednostajnie zbieżny. Kryterium Weierstrassa. Całkowanie i różniczkowanie szeregu funkcyjnego wyraz po wyrazie. Twierdzenie Abela. Promień zbieżności szeregu potęgowego, twierdzenie Cauchy’ego-Hadamarda. Całkowanie i różniczkowanie szeregu funkcyjnego wyraz po wyrazie. Szereg Taylora i Maclaurina. Rozwijanie funkcji w szereg Taylora. Rozwinięcie funkcji ekspotencjalnej, sinus i cosinus w szereg Maclaurina. Wzory Eulera. Szereg trygonometryczny Fouriera. Warunki Dirichleta. Twierdzenie Dirichleta. Rozwijanie funkcji w szereg sinusów i cosinusów.
Definicja metryki. Przykłady różnych metryk. Definicje kuli, sfery, odległość punktu od zbioru. Zbieżność w przestrzeniach metrycznych. Zupełność.
Iloczyn skalarny. Ortogonalność. Definicja normy i jej własności. Twierdzenie Banacha o punkcie o punkcie stałym. Metoda kolejnych przybliżeń.
Zbiory otwarte, domknięte, przestrzenie topologiczne. Zbiory gęste. Zbiory zwarte. Spójność.
Granice i ciągłość funkcji wielu zmiennych. Funkcja różniczkowalna, pochodna kierunkowa, pochodne cząstkowe, gradient funkcji. Zastosowanie różniczki do obliczeń przybliżonych. Pochodne i różniczki wyższych rzędów. Twierdzenie Schwarza. Różniczkowanie funkcji złożonej jednej i wielu zmiennych. Wzór Taylora dla funkcji wielu zmiennych. Warunek konieczny istnienia ekstremum. Warunki wystarczające do istnienia ekstremum funkcji wielu zmiennych. Wartości największe i najmniejsze funkcji wielu zmiennych. Określenie funkcji uwikłanej wielu zmiennych. Twierdzenie o istnieniu funkcji uwikłanej. Twierdzenie o pochodnej funkcji uwikłanej. Warunek konieczny i wystarczający istnienia ekstremum funkcji uwikłanej jednej zmiennej.
Funkcja wektorowa jednej zmiennej, ciągłość i różniczkowalność. Interpretacja geometryczna pochodnej funkcji wektorowej. Funkcja wektorowa wielu zmiennych, ciągłość i różniczkowalność. Wykresy funkcji wektorowych – opis powierzchni. Macierz Jakobiego. Jakobian przekształcenia. Współrzędne biegunowe, walcowe i sferyczne. Płat regularny i płaszczyzna styczna do płata zadanego w postaci jawnej i parametrycznej. Definicja i własności operatorów różniczkowych gradientu, diwergencji i rotacji.
Miara Jordana w Rn. Definicja i własności całki Riemanna. Obszary normalne. Całki iterowane. Twierdzenie o całkowaniu przez podstawienie. Całki podwójne i potrójne. Interpretacja geometryczna całki podwójnej i potrójnej.

**Metody oceny:**

W semestrze odbywają się trzy kolokwia punktowane w skali od 0 do 15 punktów każde oraz trzy kartkówki punktowane w skali od 0 do 2 punktów. Punktowana jest także aktywność na ćwiczeniach, za którą można uzyskać od 0 do 9 punktów. Łącznie za ćwiczenia można uzyskać od 0 do 60 punktów. Do zaliczenia ćwiczeń wymagane jest zdobycie co najmniej 30 punktów. Semestr kończy się zaliczeniem ćwiczeń i egzaminem. Do egzaminu może przystąpić każdy student, który uczęszczał na ćwiczenia. Egzamin punktowany jest w skali od 0 do 60 punktów i składa się z dwóch części: części zadaniowej i teoretycznej; za każdą z tych części można otrzymać maksymalnie 30 punktów. Egzamin uznaje się za zdany jeśli spełnione są jednocześnie dwa warunki:
(1) ilość punktów za część teoretyczną jest większa lub równa 15,
(2) suma punktów z ćwiczeń, części zadaniowej i części teoretycznej egzaminu jest większa lub równa 61. Łączną ocenę punktową studentów przelicza się na stopnie według poniższych zasad:
a) 3.0 jeżeli uzyskali od 61 do 70 pkt.
b) 3.5 jeżeli uzyskali od 71 do 80 pkt.
c) 4.0 jeżeli uzyskali od 81 do 90 pkt.
d) 4.5 jeżeli uzyskali od 91 do 105 pkt.
e) 5.0 jeżeli uzyskali powyżej 105 pkt.

**Egzamin:**

tak

**Literatura:**

1. F. Leja, Rachunek różniczkowy i całkowy, wyd. XVII, PWN, Warszawa, 2012.
2. W. Kołodziej, Analiza matematyczna, PWN, Warszawa, 1978.

**Witryna www przedmiotu:**

e.mini.pw.edu.pl

**Uwagi:**

## Charakterystyki przedmiotowe

### Profil ogólnoakademicki - wiedza

**Charakterystyka W01:**

Zna podstawowe własności przekształceń ciągłych przestrzeni metrycznych i przestrzeni unormowanych

Weryfikacja:

egzamin pisemny

**Powiązane charakterystyki kierunkowe:** K\_W01

**Powiązane charakterystyki obszarowe:**

**Charakterystyka W02:**

Zna teorię szeregów liczbowych i szeregów funkcyjnych

Weryfikacja:

egzamin pisemny

**Powiązane charakterystyki kierunkowe:** K\_W01

**Powiązane charakterystyki obszarowe:**

**Charakterystyka W03:**

Zna podstawy rachunku różniczkowego funkcji wielu zmiennych oraz jego zastosowania

Weryfikacja:

egzamin pisemny

**Powiązane charakterystyki kierunkowe:** K\_W01

**Powiązane charakterystyki obszarowe:**

**Charakterystyka W04:**

Zna teorię całek wielokrotnych Riemanna i metody ich całkowania w różnych układach współrzędnych

Weryfikacja:

egzamin pisemny

**Powiązane charakterystyki kierunkowe:** K\_W01

**Powiązane charakterystyki obszarowe:**

### Profil ogólnoakademicki - umiejętności

**Charakterystyka U01:**

Potrafi badać zbieżność szeregów liczbowych bezwzględną i warunkową. Umie badać zbieżność punktową i jednostajną ciągów i szeregów funkcyjnych

Weryfikacja:

ocena punktowa kartkówek i kolokwiów oraz aktywności na zajęciach

**Powiązane charakterystyki kierunkowe:** K\_U01, K\_U02, K\_U09

**Powiązane charakterystyki obszarowe:**

**Charakterystyka U02:**

Potrafi znajdować granice funkcji wielu zmiennych, badać ciągłość. Potrafi obliczać oraz stosować pochodne cząstkowe dowolnego rzędu, poszukiwać ekstremów lokalnych i globalnych. Potrafi stosować ekstremów lokalnych i globalnych

Weryfikacja:

ocena punktowa kartkówek i kolokwiów oraz aktywności na zajęciach

**Powiązane charakterystyki kierunkowe:** K\_U01, K\_U02, K\_U09

**Powiązane charakterystyki obszarowe:**

**Charakterystyka U03:**

Potrafi obliczyć całkę Riemanna po obszarze normalnym, we współrzędnych kartezjańskich, biegunowych, walcowych i sferycznych

Weryfikacja:

ocena punktowa kartkówek i kolokwiów oraz aktywności na zajęciach

**Powiązane charakterystyki kierunkowe:** K\_U01, K\_U02, K\_U09

**Powiązane charakterystyki obszarowe:**

**Charakterystyka U04:**

Umie stosować całkę podwójną i potrójną do obliczania pól powierzchni oraz objętości brył

Weryfikacja:

ocena punktowa kartkówek i kolokwiów oraz aktywności na zajęciach

**Powiązane charakterystyki kierunkowe:** K\_U02, K\_U09, K\_U01

**Powiązane charakterystyki obszarowe:**